Liite B

Fourier-menetelmät

Fourier-muunnos on perusmenetelmä, jolla funktion tai aikasarjan esityksessä siirrytään reaaliavaruuden ja taajuusavaruuden välillä (esim. ilmanpaine ajan funktiona – äänen taajuus; jännite ajan funktiona – signaalin taajuus). Ajan funktioon tehty Fourier-muunnos kuvaa funktion sen taajuuskomponenttien summana, ja Fourier-käänteismuunnoksella saadaan takaisin alkuperäinen funktio.

B.1 Jatkuva Fourier-muunnos

Jatkuvan funktion $g(x)$ *Fourier-muunnos* $G(t)$ määritellään integraalina

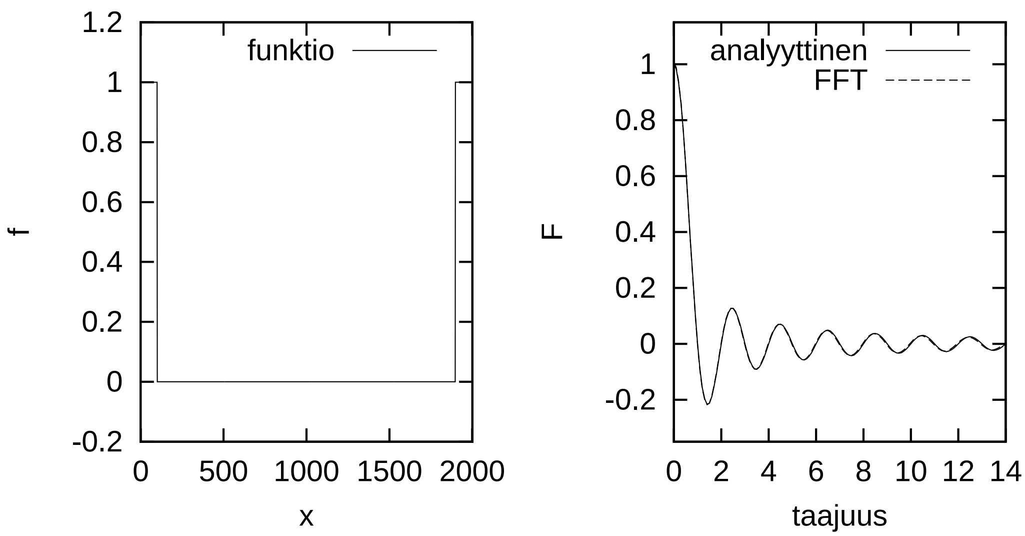
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi t f} dt. \tag{B.1}$$

Funktio $G(f)$ kertoo signaalin voimakkuuden *taajuuden* f funktiona. Vastaavasti määritellään Fourier-käänteismuunnos

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{+i2\pi t f} df, \tag{B.2}$$

jolla Fourier-muunnoksesta $G(f)$ saadaan laskettua alkuperäinen funktio $g(t)$. Muunnokset ovat siis eksponenttitermin merkkiä lukuunottamatta täsmälleen samanmuotoiset, joskin tietenkin myös integrointi suoritetaan eri muuttujan suhteen.

Otetaan esimerkiksi laatikkofunktio, joka saa arvon 0 muualla paitsi välillä



Kuva B.1: Laatikkofunktio ja sen Fourier muunnos

$|x| < x_0/2$, jossa funktion arvo on yksi. Funktion Fourier-muunnos on

$$
\begin{aligned}
F(f) &= \int_{-x_0/2}^{x_0/2} e^{-i2\pi x f} dx \\
&= \frac{-1}{i2\pi f}(e^{-i\pi x_0 f} - e^{i\pi x_0 f}) \\
&= \frac{sin(\pi x_0 f)}{\pi f}. \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

Yksinkertaisen laatikkofunktionkin taajuusesitys sisältää siis äärettömän joukon taajuuksia. Fourier-muunnoksen tulos, joka tässä tapauksessa on kokonaan reaaliarvoinen, on esitetty kuvassa B.1.

Fourier-muunnos on yleensä kompleksiarvoinen funktio, joka voidaan kirjoittaa sen reaaliosan $R(u)$ ja imaginääriosan $I(u)$ avulla

$$F(u) = R(u) + i\,I(u) = |F(u)|e^{i\phi(u)}. \qquad \text{(B.4)}$$

$|F(u)|$ on Fourier-muunnoksen *amplitudi*

$$|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2} \qquad \text{(B.5)}$$

ja $\phi(u)$ sen *vaihe*

$$\phi(u) = tan^{-1}(I(u)/R(u)). \qquad \text{(B.6)}$$

Fourier-muunnos on puhtaasti reaaliarvoinen vain erikoistapauksissa. Näin on esimerkiksi silloin, kuin alkuperäinen funktio on reaaliarvoinen ja parillinen (esim. kuvan B.1 laatikkofunktio).

Fourier-muunnos voidaan yleistää useampaan ulottuvuuteen, jolloin havaittu suure on useamman kuin yhden muuttujan funktio. Esimerkkejä ovat karttojen analyysi ja interferometria. Kaksiulotteinen Fourier-muunnos määritellään seuraavasti:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy. \tag{B.7}$$

Toisin sanoen integraalin sisällä muunnettava funktio f kerrotaan nyt eksponenttitermillä, joka vastaa kahden 1-ulotteisen Fourier-muunnoksen eksponenttitermien tuloa. Samaan tapaan voidaan muunnos yleistää vielä useampaan ulottuvuuteen. Kartan tapauksessa x ja y olisivat kaksi paikkakoordinaattia (yksikkönä esim. radiaani), ja u ja v näitä vastaavat 'paikkataajuudet' (yksikkö rad^{-1}). Käänteismuunnos saadaan jälleen vaihtamalla eksponenttitermin merkki ja integrointimuuttujat

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{+i2\pi(ux+vy)}dudv. \tag{B.8}$$

B.2 Diskreetti Fourier-muunnos

Käytännössä mittauksissa ei koskaan pystytä tekemään äärettömän tiheästi, vaan mittausarvot muodostavat diskreetin joukon arvoja, jotka voivat vastata esimerkiksi eri havaintoajankohtia. Jos havainnot on tehty tasavälisesti, voidaan havaintoaineiston taajuusanalyysiin käyttää suoraan *diskreettiä Fourier-muunnosta.* Oletetaan, että tutkittavalle suureelle on mitattu diskreetit arvot $x_1, x_2, \ldots, x_N$ vastaten ajanhetkiä $t_1, t_1 + \Delta t, \ldots, t + (N-1)\Delta t$. Tässä Δt on havaintojen välinen aika, joka pysyy vakiona. Diskreetti Fourier-muunnos määritellään

$$G_u = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i2\pi ku/N},\ u = 0,\ldots,N-1 \tag{B.9}$$

ja diskreetti käänteismuunnos

$$g_k = \sum_{u=0}^{N-1} G_u e^{+i2\pi ku/N},\ k = 0,\ldots,N-1 \tag{B.10}$$

Diskreetti muunnos sisältää yhtä monta diskreettiä arvoa kuin lukusarja, josta se lasketaan. Kukin Fourier-termi G_n kuvaa alkuperäisessä aikasarjassa tietyllä taajuudella tapahtuvan jaksollisen vaihtelun suuruutta. Termi G_n vastaa todellista taajuutta

$$f = \frac{n}{N\Delta t}, \tag{B.11}$$

jossa Δt on alkuperäisen havaintosarjan otantaväli. Termi G_0 vastaa 'nollataajuutta' eli kuvaa havaintosarjan nollatasoa.
Jos havaintosarjassa on N pistettä, antaa diskreetti Fourier muunnos myös N taajuuskomponenttia. Edellisen kaavan mukaan korkein taajuus olisi periaatteessa $1/\Delta t$. Itse asiassa vain puolet taajuuskomponenteista on toisistaan riippumattomia. *Nyquist-taajuus*

$$f_{\mathrm{Nyq}} = \frac{1}{2\Delta t}. \tag{B.12}$$

määrittelee korkeimman taajuuden, josta vielä saadaan informaatiota otantavälin ollessa Δt. Korkeammat taajuudet *peilautuvat* Nyquistin rajan alapuolelle.
Fourier-muunnoksen eksponenttitermien merkki on sopimuskysymys. Oleellista on ainoastaan se, että muunnos-käänteismuunnos parissa eksponenttien etumerkit ovat vastakkaiset. Yllä diskreetissä Fourier-muunnoksessa on normalisointitekijä $1/N$, joka takaa sen, että muunnoksen ja käänteismuunnoksen jälkeen tulokseksi saadaan alkuperäinen lukusarja. Vaihtoehtoisesti normitustekijä voidaan sisällyttää käänteismuunnoksen kaavaan tai molemmissa muunnoksissa käytetään kerrointa $1/\sqrt{N}$. Normitustekijän sijainti on oleellinen silloin, kun Fourier-muunnosta käytetään signaalin tehospektrin laskemiseen (kts. alla). Diskreetti Fourier-muunnos voidaan laskea tehokkaasti nopean Fourier-muunnoksen (*FFT-algoritmi*) avulla, jolloin laskenta-aika riippuu sarjan pituudesta $t \sim N\,log\,N$.

B.3 Korrelaatio

Kahden jatkuvan funktion f ja g **korrelaatio** määritellään integraalina

$$COR(f,g)(h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)g(x)dx. \tag{B.13}$$

Tässä siis lasketaan funktioiden tulon integraali, jossa toinen funktioista on siirretty x-akselilla matkan h verran. Tulos $Corr(f,g)$ on nimenomaan tämän siirtymän funktio ja kertoo siitä, kuinka hyvin funktion g arvot korreloivat matkan h päässä laskettujen funktion f arvojen kanssa. **Autokorrelaatio** on tärkeä erikoistapaus, jossa f ja g ovat sama funktio eli

$$ACF_f(h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)f(x)\,dx. \tag{B.14}$$

Autokorrelaatiofunktio on suuri silloin, kun $f(x)$ ja $f(x+h)$ korreloivat eli funktiossa on jaksollisuutta aallonpituudella h. Autokorrelaatiota voidaan käyttää samaan tapaan kuin Fourier-muunnosta tutkittaessa funktion taajuuskomponentteja. Fourier-analyysi antaa vastauksen taajuusavaruudessa taajuuden funktiona, autokorrelaatiofunktio taas alkuperäisessä avaruudessa siirtymän h (esim. matka tai aika) funktiona. Fourier-muunnosten ja funktioiden korrelaation välillä on seuraava yhteys

$$F(COR(f,g)) = F(f)\,F(g)^{\dagger}. \tag{B.15}$$

Symboli † tarkoittaa kompleksikonjugointia, $(a+ib)^{\dagger} = a - ib$. Korrelaatiofunktion Fourier-muunnos on siis ensimmäisen funktion Fourier-muunnos kertaa toisen funktion Fourier-muunnoksen kompleksikonjugaatti. Tämä on **korrelaatioteoreema**. Autokorrelaation tapauksessa

$$F(ACF_f) = |F(f)|^2. \tag{B.16}$$

Tämä tunnetaan myös *Wiener-Khinchin*-teoreemana. Diskreettien lukusarjojen x_i, y_i, $i = 1, \ldots, N$ välille korrelaatio määritellään analogisesti

$$Corr(x,y)_h = \sum_{i=1}^{N} x_i y_{i+h}. \tag{B.17}$$

Käytännössä mitatut lukusarjat ovat äärellisiä, ja tämä on huomioitava summaa laskettaessa. Voidaan esimerkiksi määritellä $y_i = 0$, $i > N$ tai olettaa lukusarjat syklisiksi $(y_{N+i} = y_i)$ – valinta vaikuttaa aina lopputulokseen. Korrelaatioteoreeman perusteella korrelaatio voidaan laskea tehokkaasti nopean Fourier-muunnoksen avulla.

B.4 Konvoluutio

Funktioiden konvoluutio määritellään integraalina

$$(f * g)(h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(h-x) dx. \tag{B.18}$$

Integraali kuvaa funktion g muutosta, kun se konvoloidaan suodatinfunktiolla f. Jos suodatinfunktio on esimerkiksi nollasta poikkeava vain origon lähellä, konvoluutiointegraalin arvo kussakin pisteessä h on painotettu summa funktion g arvoista pisteen h läheisyydessä. Integraalissa kunkin pisteen paino on verrannollinen suodatinfunktion f arvoon siirtymällä x. Jos suodatinfunktio $f(x)$ on delta-funktio, antaa konvoluutio-integraali takaisin alkuperäisen funktion g. Jos $f(x)$ on puolestaan laatikkofunktio $f(x) = 1/a, |x| < a/2$, on konvoluution arvo pisteessä h funktion g keskiarvo välillä

$[h-a/2,\ h+a/2]$. **Konvoluutioteoreeman** mukaan funktioiden konvoluution Fourier-muunnos on funktioiden Fourier-muunnosten tulo

$$F(f*g)=F(f)\,F(g). \tag{B.19}$$

Diskreetti konvoluutio on

$$(x*y)_h=\sum_{i=1}^{N}x_iy_{h-i}. \tag{B.20}$$

Jälleen voidaan asettaa esimerkiksi $y_i=0,\ i<1, i>N$. Suurten lukusarjojen tapauksessa konvoluutioteoreeman ja nopean Fourier-muunnoksen (FFT) käyttö on nopeampaa kuin konvoluution laskeminen suoraan määritelmästä. Konvoluutioteoreema yleistyy myös useampaan ulottuvuuteen. Kohdetta mitattaessa on havaittava intensiteetti taivaan todellisen kirkkausjakauman $I(\theta,\phi)$ ja teleskoopin keilakuvion P konvoluutio:

$$I(\theta_0,\phi_0)=\int\int I(\theta,\phi)P(\theta-\theta_0,\phi-\phi_0)d\theta d\phi. \tag{B.21}$$

Tässä (θ_0,ϕ_0) on piste, johon teleskooppi on suunnattu ja (θ,ϕ) yleinen suunta, jonka yli integrointi tehdään. FFT-algoritmia voidaan käyttää siten myös laskettaessa kartan konvoluutio annetun keilakuvion kanssa.

B.5 Tehospektri

Funktion $g(t)$ Fourier-muunnos $G(u)$ kertoo funktion amplitudin ja vaiheen taajuus-avaruudessa taajuudella u. Amplitudin neliö on signaalin teho kyseisellä taajuudella ja funktiota $P(u)=|G(u)|^2$ kutsutaan funktion $g(t)$ *tehospektriksi*. Tavallisesti positiiviset ja negatiiviset taajuudet lasketaan yhteen, jolloin tehospektri lasketaan kaavasta

$$P(u)=|G(u)|^2+|G(-u)|^2. \tag{B.22}$$

Itseisarvomerkit tarvitaan, koska Fourier-muunnos on yleisessä tapauksessa kompleksinen ($|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$). Diskreetin havaintojoukon, x_j, diskreetti Fourier-muunnos lasketaan (tässä ilman normitustekijää)

$$F_k=\sum_{j=0}^{N-1}x_je^{-i\,2\pi\ jk/N},\quad k=0,\ldots,N-1. \tag{B.23}$$

Estimoitu signaalin tehospektri on määritelty $1 + N/2$ pisteessä

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{1}{N^2}|F_0|^2 \\ P(f_k) &= \frac{1}{N^2}\left(|F_k|^2 + |F_{N-k}|^2\right) \\ P(f_{N/2}) &= \frac{1}{N^2}|F_{N/2}|^2 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Viimeinen termi esiintyy ainoastaan, jos N on parillinen. Edelliset kaavat määrittelevät yksipuoleisen tehospektrin, joka on määritelty vain positiivisille taajuuksille. Termit vastaavat diskreettejä taajuuksia

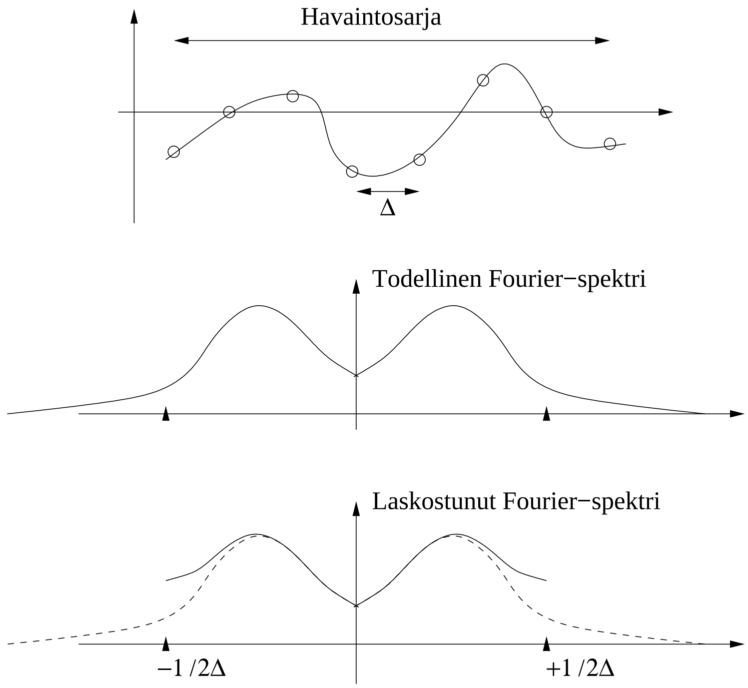
$$f_j = \frac{j}{N\Delta}, \quad j = 0, 1, \ldots, N/2. \tag{B.25}$$

Suurin taajuus on Nyquistin taajuus, $1/(2\Delta)$, jossa Δ on näytteenottoväli. Signaalin kokonaisteho P voidaan laskea yhtä hyvin funktion kuin sen Fourier-muunnoksenkin avulla

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(u)|^2 du, \tag{B.26}$$

tai diskreetissä tapauksessa vastaavina summina. Tätä voidaan käyttää hyväksi tarkistettaessa tehospektrin oikea normitus. Korrelaatioteoreeman mukaan autokorrelaatiofunktion Fourier-muunnos on myös suoraan funktion tehospektri. N pisteessä havaitusta funktiosta tehty diskreetti Fourier-muunnos sisältää aina N termiä. On muistettava, että näistä vain puolet on toisistaan riippumattomia ja tehospektri on määrätty ainoastaan Nyquistin taajuuteen, $1/(2\Delta)$, saakka. Jos todellisessa signaalissa on Nyquistin rajaa korkeampia taajuuksia, ne 'aliasoituvat' (peilautuvat) matalammille taajuuksille eli kasvattavat keinotekoisesti näille laskettua tehoa (kts. kuva B.2). Paitsi otantataajuus myös havaintosarjan äärellisyys aiheuttaa virhettä laskettuun tehospektriin, sillä Fourier-analyysi perustuu oletukselle havaitun signaalin jaksollisuudesta. Äärellinen havaintosarja ei itse asiassa edusta todellista signaalia vaan signaalin ja erään ikkunafunktion tuloa. Tämä ikkunafunktio on laatikkofunktio, jonka arvo on 1 havaittujen pisteiden kohdalla ja muualla nolla. Ongelmana on ikkunafunktion äkillinen hyppäys välin päätepisteissä, mikä aiheuttaa häiriötä tehospektriin. Tehoa 'valuu' taajuuksilta toisille (*leakage*). Ongelmaa voidaan lieventää ottamalla käyttöön toinen ikkunafunktio, joka laskee lukusarjan alku- ja loppupäissä loivemmin nollaan. Yleisimpiä ikkunafunktioita ovat *Parzen, Hanning* ja *Welch*. Esimerkiksi Parzen-ikkunoinnissa havaintopisteiden paino pienenee lineaarisesti reunoja kohden

$$w_j = 1 - \left|\frac{j - (N-1)/2}{(N+1)/2}\right|. \tag{B.27}$$



Kuva B.2: Aliasoituminen: Nyquistin taajuutta $f_{\rm Nyq}$ korkeammilta taajuuksilta Fourier-spektri heijastuu (laskostuu) takaisin taajuusvälille [-$f_{\rm Nyq}$, $f_{\rm Nyq}$]

Fourier-muunnos lasketaan painotetulle lukusarjalle $x_j w_j$, minkä jälkeen tehospektri saadaan kaavasta (B.24) - saadut arvot on kuitenkin normitettava jakamalla N:n sijasta ikkunafunktion neliösummalla,

$$W = N \sum w_j^2. \tag{B.28}$$