Kvanttifysiikan perusteet Harjoitus 4 Kevät 2014

Nämä tehtävät käsitellään 7. ja 8.4..

1. Vetyatomi on superpositiotilassa

$$|\psi\rangle = N\left(2|100\rangle + |200\rangle + \sqrt{8}|210\rangle + 3i|32-2\rangle - \sqrt{5}|320\rangle\right) ,$$

missä N on normitusvakio ja $|nlm\rangle$ ovat ominaistiloja. Kun systeemiä mitataan, niin mitkä arvot ovat mahdollisia, ja millä todennäköisyydellä ne saadaan
a) energialle,
b) kulmaliikemäärän neliölle ja
c) kulmaliikemäärän z-komponentille?
Entä mitkä ovat näiden suureiden odotusarvot? (Vihje: aloita normituksesta.)

2. Tarkastellaan kulmaliikemääräoperaattoria $\hat{\bar{L}} = \hat{\bar{x}} \times \hat{\bar{p}}$. Huomaa, että operaattorit ovat tässä vektoreita, eli niillä on x–, y– ja z–komponentit.

Osoita, että vektorin $\hat{\bar{L}}$ komponenteille pätee $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hbar \hat{L}_z$. Kommutaattorin määritelmä on $[A, B] \equiv AB - BA$.

(Pätee myös, että $[\hat{\bar{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$, missä $\hat{\bar{L}}^2 = \hat{\bar{L}} \cdot \hat{\bar{L}}$, mutta sitä ei tarvitse tässä osoittaa.)

(Vihje: Tehtävän voi laskea kahdella tavalla. Voi käyttää hyväksi sitä, että $\hat{\bar{x}}\psi = \bar{x}\psi$ ja $\hat{\bar{p}}\psi = -i\hbar\nabla\psi$, ja laskea derivaattoja. Toinen mahdollisuus on käyttää hyväksi vain sitä, että $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Joka tapauksessa kannattaa olla huolellinen operaattorien järjestyksen kanssa!)

3. Koska elektronin spinillä voi olla määrättynä vain z-komponentti ja mahdollisia arvoja on vain kaksi, Hilbertin avaruus (eli tilojen vektoriavaruus) on armollisesti kaksiulotteinen. Spin-tiloille voidaan ottaa seuraavat esitykset:

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Tällöin spin-operaattorin komponentteja voidaan kuvata matriiseina $\hat{S}_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i$, missä σ_i ovat *Paulin spin-matriisit*:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Osoita, että tilat $|+\rangle$ ja $|-\rangle$ ovat $\hat{S}_z$:n ominaistiloja ja laske niiden ominaisarvot.
b) Laske kommutaattori $[\sigma_x, \sigma_y]$ ja $\sigma^2 \equiv \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$. c) Osoita, että tilat $|+\rangle$ ja $|-\rangle$ ovat σ^2:n ominaistiloja, mutta eivät σ_x:n eikä σ_y:n.

4. Hiukkanen laatikossa viimeisen kerran. Tällä kertaa yksiulotteinen laatikko on toisesta päästä äärellisen syvyinen. Potentiaali on $V(x) = \infty$ kun $x < 0$, $V(x) = 0$ välillä $0 < x < L$ ja $V(x) = V_0 > 0$ kun $x > L$.
a) Ratkaise energian ominaisfunktiot kun $E - V_0 < 0$. (Normitusvakiota ei tarvitse laskea.) Mitä tapahtuu jos $E > V_0$?
b) Kirjoita yhtälö, josta energian ominaisarvot voi laskea. (Yhtälöä ei tarvitse ratkaista.)
(Vihje: Ratkaise Schrödingerin yhtälö erikseen eri alueissa ottaen huomioon, että aaltofunktio häviää nollassa ja äärettömyydessä. Eri alueiden ratkaisuja sitoo yhteen vaatimus, että aaltofunktio ja sen ensimmäinen derivaatta ovat jatkuvia pisteessä $x = L$.)