Tiivistelmä matriisilaskennasta

v 3.5, 2.12.2008, Ossi Pasanen

Nimityksiä ja merkintätapoja

- $m \times n$ -matriisi on reaali- tai kompleksiluvuista koostuva lukukaavio, jossa on m vaakariviä ja n saraketta (pystyriviä).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriisin A *alkio* a_{ij} on vaakarivillä i, sarakkessa j oleva luku. Indeksoinnin järjestys aina: rivi,sarake. Indeksointi aloitetaan ykkösestä.

Esim. 3×2-matriisi ("kolme kertaa kaksi matriisi")

$$M = \begin{pmatrix} 6i & 4 \\ -2 & 3+i \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

M:n alkioita ovat esim. $m_{22} = 3 + i$ ja $m_{31} = 0$.

- Matriiseja merkataan yleensä isoilla kirjaimilla, kuten A, B, C, $\dots$ tai M, N, $\dots$.
- Matriisin alkioita merkitään yleensä pienillä kirjaimilla, kuten a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} tai m_{ij}, n_{ij}.
- Matriisilaskennassa on kaksi puolta. Lausekkeet kirjoitetaan toisinaan kokonaisten matriisien avulla eli usein isoja kirjaimia käyttäen. Samat lausekkeet voidaan aina kirjoittaa myös alkioiden tasolla, jolloin merkintänä käytetään vastaavia pieniä kirjaimia. Tämä jako ei kuitenkaan ole tiukka. Pieniä kirjaimia käytetään myös kokonaisten matriisien niminä. Jos lausekkeessa esiintyy indeksejä, kyse on indeksimuodosta, muutoin tarkoitetaan kokonaisia matriiseja. On mahdollista vaihtaa näkökulmaa kesken laskun ja sitä käytetään esimerkiksi todistuksissa.
- Kun halutaan siirtyä kokonaisten matriisien tasolta alkioiden tasolle, on käytössä merkintä $(A)_{ij}$. Tällä viitataan matriisin A rivillä i sarakkeessa j sijaitsevaan alkioon eli alkioon a_{ij}. Eri näkökulmien merkintöjen välillä on siis yhteys $(A)_{ij} = a_{ij}$. Jos taas halutaan siirtyä alkiomuodosta kokonaiseen matriisiin, merkitään $(a_{ij}) = A$.
- Mariisilausekkeissa esiintyviä tavallisia reaali- tai kompleksilukuja merkitään pienillä kirjaimilla.

Esim. Lausekkeessa $bM + cN$ ovat b ja c tavallisia lukuja ja M ja N matriiseja.

Esim. Sama lauseke voidaan kirjoittaa myös alkiomuodossa. Tällöin eron matriisin alkioiden ja reaali- ja kompleksilukukertoimien välillä huomaa siitä, että alkioissa käytetään alaindeksejä. Edellinen lauseke alkioiden avulla on $b\,m_{ij} + c\,n_{ij}$.

- Toisinaan sovellustilanteissa matriisin alkioiden lukuarvot saattavat riippua rivistä ja sarakkeesta.

Esim. Olkoon C tyyppiä 3×3 oleva matriisi, jonka alkiot noudattavat kaavaa $c_{ij} = i + j$. Tällöin matriisi C on matriisimuodossa esitettynä $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

- 1-rivisiä tai 1-sarakkeisia matriiseja kutsutaan vektoreiksi. Niitäkin merkitään usein pienillä kirjaimilla. Selvyyden vuoksi on tapana käyttää päällä vektoriviivaa tai painetussa tekstissä lihavoitua (bold) kirjasintyyppiä.
- 1×1 -matriisi on tavallinen yksittäinen luku
- $1 \times n$ -matriisi on vaakavektori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$.

- $n \times 1$ -matriisi on pystyvektori $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- Sekä vaaka-, että pystyvektorit voidaan samaistaa avaruuden vektoreiden kanssa.

Esim. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ tai $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

- Matriisi A voidaan kirjoittaa vaakavektoreiden $\mathbf{u}_i$ tai pystyvektoreiden $\mathbf{v}_i$ avulla.

Esim.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$$

missä $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- *Nollamatriisin* kaikki alkiot ovat nollia: $a_{ij} = 0$. Merkitään $\mathbf{0}$.
- Samaa tyyppiä olevat matriisit ovat emphidenttiset, jos niiden vastinalkiot ovat lukuarvoltaan yhtäsuuria.
- Matriiseilla ei ole "suuruuden" käsitettä, joten matriiseja ei voi järjestää suuruusjärjestykseen. Voidaan puhua ainoastaan matriisien identtisyydestä. Matriisien identtisyyttä merkitään tavallisella = -merkillä. Suuruuden sijasta matriisien luokittelussa käytettäviä käsitteitä ovat myöhemmin esiteltävät matriisin determinantti ja jälki.
- Matriisin *päälävistäjä* eli *diagonaali* koostuu alkioista a_{ii} eli sellaisista alkioista, joiden rivi- ja sarakenumerot ovat samoja.

Esim. diagonaalialkiot korostettu

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 4 \\ 3 & \boxed{4} & 5 \\ 4 & 5 & \boxed{6} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{6} & 4 \\ -2 & \boxed{3} \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Matriisin kertominen luvulla

- Matriisin kertominen luvulla tapahtuu kertomalla jokainen alkio kyseisellä luvulla.

Esim. Olkoon M sama kuin aiemmin määritelty. Tällöin

$$4M = 4\begin{pmatrix} 6i & 4 \\ -2 & 3+i \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24i & 16 \\ -8 & 12+4i \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$$

- Luvulla kertomista voidaan hyödyntää myös toiseen suuntaan eli jakaa kaikki matriisin alkiot samalla luvulla ja kirjoittaa kyseinen luku matriisin eteen yhteiseksi tekijäksi.

Esim.

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -24 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yleensä murtoluvut näyttävät sotkuiselta matriisin sisällä. Jos matriisin sisällä on murtolukuja, tapana on usein ottaa sellainen murtokerroin tekijäksi eteen, että matriisin sisään jää vain kokonaislukuja.

Esim.

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 5/4 \\ 0 & -2 \\ 7/12 & 4/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -8 & 15 \\ 0 & -24 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}.$$

- Matriisin A *vastamatriisi* saadaan kertomalla luvulla -1 eli $-A$.

Matriisien yhteen- ja vähennyslasku

- *Vain samaa tyyppiä* olevat matriisit voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan ($A+B$ tai $A-B$). Yhteen- ja vähennyslasku tapahtuu alkioittain.

Esim.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 4 & 1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 4 & 0 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

- Matriisien yhteen- ja vähennyslaskussa ja luvulla kertomisessa pätevät normaalit algebran säännöt eli vaihdanta-, liitäntä, ja osittelulaki.
(MUISTA: Jäljempänä määriteltävä *matriisikertolasku* ei noudata vaihdantalakia!)

Matriisin transpoosi ja konjugaatti

- Matriisin *transpoosi* A^T tarkoittaa matriisia, joka saadaan vaihtamalla eli *transponoimalla* matriisin rivit ja sarakkeet keskenään niiden järjestys säilyttäen. Alkioiden avulla kirjoitettuna $A = (a_{ij}) \to A^T = (a_{ji})$

Esim. $\begin{pmatrix} 6\mathrm{i} & 4 \\ -2 & 3+\mathrm{i} \\ 0 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6\mathrm{i} & -2 & 0 \\ 4 & 3+\mathrm{i} & -5 \end{pmatrix}$. Diagonaali ei muutu transponoinnissa!

- Yleensä on tapana merkitä kaikki vektorit pystyvektoreina, sillä tarvittaessa niistä voidaan tehdä vaakavektoreita transponoimalla. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$

- *konjugoitu-* eli *liittomatriisi* saadaan kompleksikonjugoimalla kaikki matriisin alkiot: $A^* = (a^*_{ij})$

- Sovelluksissa (esim. kvanttimekaniikassa) tarvitaan matriisin *hermiittistä konjugaattia* eli *adjungoitua matriisia*, jolla tarkoitetaan kompleksikonjugoinnin ja transponoinnin yhdistelmää. Hermiittisen konjugoinnin merkkinä käytetään matriisin oikeaan yläkulmaan piirrettyä "miekkaa/tikaria". $A^\dagger = (A^*)^T = (A^T)^*$

Neliömatriisit

- Tyyppiä $n \times n$ olevat matriisit ovat *neliömatriiseja.*

- *Diagonaalimatriisissa* diagonaalin ulkopuolella olevat (eli ei-diagonaaliset) alkiot ovat nollia: $a_{ij} = 0$, jos $i \neq j$.

Esim. Matriisi $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ on diagonaalimatriisi.

- Koska diagonaalimatriisin kuvaamiseksi riittää tietää diagonaalialkiot, esitetään niitä toisinaan lyhyesti muodossa $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Esim.

$$\mathrm{diag}(3,-5,2+i)=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 2+i\end{pmatrix}$$

- *Yksikkömatriisissa* kaikki diagonaalialkiot ovat ykkösiä. Tyyppiä $n\times n$ yksikkömatriisia voidaan merkitä $\mathbf{1}_n$ tai $\mathbf{1}_{n\times n}$, mutta usein merkitään vain lyhyesti $\mathbf{1}$ tai I. Ero tavallisen luvun 1 ja yksikkömatriisin välillä selviää yleensä asiayhteydestä, vaikka niille käytettäisiinkin samaa symbolia.

Esim. Matriisi $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ on 2×2-tyyppin yksikkömatriisi.

- Matriisi on *symmetrinen*, jos $A^T=A$ ja *antisymmetrinen*, jos $A^T=-A$.

Esim. Matriisi $\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ on symmetrinen ja matriisi $\begin{pmatrix}0 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ on antisymmetrinen.

- Matriisi on *hermiittinen*, jos $A^\dagger=A$ ja *antihermiittinen*, jos $A^\dagger=-A$.

Esim. Matriisi $\begin{pmatrix}3 & 4-i\\ 4+i & 5\end{pmatrix}$ on hermiittinen ja matriisi $\begin{pmatrix}2i & -3+i\\ 3+i & -4i\end{pmatrix}$ on antihermiittinen.

- Matriisi voidaan jakaa näppärästi symmetriseen tai antisymmetriseen osaan seuraavasti

$$A=\frac{1}{2}\underbrace{(A+A^T)}_{\text{sym.}}+\frac{1}{2}\underbrace{(A-A^T)}_{\text{antisym.}}$$

Hermiittiseen ja antihermiittiseen osaan jakaminen tapahtuu vastaavasti "miekkailemalla".

Matriisikertolasku

- Vain tyyppiä $(m\times k)\cdot(k\times n)$ oleva matriisikertolasku on määritelty. Kertolaskun tuloksena syntyy $m\times n$ -matriisi.

Esim. Matriisi 2×3 voidaan kertoa 3×4 matriisilla ja tuloksena syntyy 2×4 matriisi. Symbolisesti "$(2\times 3)\cdot(3\times 4)=2\times 4$". Sen sijaan kertolasku $(3\times 4)\cdot(2\times 3)$ ei ole määritelty!

- Samankokoiset neliömatriisit voidaan kertoa aina keskenään ja tuloksena on samankokoinen neliömatriisi: "$(n\times n)\cdot(n\times n)=n\times n$".
- Kertolaskun järjestys on tärkeä! Yleensä $AB\neq BA$. Monesti AB ja BA ovat vieläpä täysin erityyppiä tai toinen kertolaskuista ei välttämättä ole edes määritelty, kuten yllä olevassa esimerkissä. *Matriisikertolasku ei siis noudata vaihdantalakia!*
- Liitäntä- ja osittelulaki pätevät matriisikertolaskussa.
- **Matriisikertolaskun resepti**
  Lyhyesti sanottuna:

  > Matriisikertolaskussa syntyy uusi matriisi, jonka alkiot saadaan laskemalla kertolaskussa vasemmalla olevan matriisin vaakavektoreiden ja oikealla olevan matriisin pystyvektoreiden pistetuloja. Pistetuloista saadut lukuarvot kirjoitetaan uuteen matriisiin poimittuja vektoreita vastaavien vaaka- ja pystyrivien mukaisiin kohtiin.

Käytänssä kannattaa tomia näin: Vasemmalla olevassa matriisissa otetaan aina käsittelyyn yksi vaakarivi ja oikeanpuoleisessa matriisissa pystyrivi. Vaaka- ja pystyrivien alkiot kerrotaan järjestyksessä keskenään ja lasketaan saadut tulot yhteen. Näin saadaan selville tulomatriisin alkio, jonka sijainti vastaa vasemmalta otettua vaakariviä ja oikealta otettua pystyriviä.

Kannattaa edetä järjestelmällisesti ottamalla oikealta ensimmäinen pystyrivi ja käymällä sen kanssa läpi kaikki vasemman matriisin vaakarivit. Sitten siirrytään oikealla seuraavaan pystyriviin ja taas käydään läpi kaikki vasemman matriisin vaakarivit. Näin jatketaan, kunnes kaikki oikeanpuoleisen matriisin pystyrivit on käyty läpi.

Kertolaskun idea selviää oheista esimerkkiä tutkimalla. Korostus selventää, miten oikealla olevan lopputuloksen eräs alkio lasketaan.

<u>**Esim.**</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 8 + 5\cdot 0 + 0\cdot(-7) & 2\cdot 1 + 5\cdot 6 + 0\cdot 5 \\ -3\cdot 8 + 1\cdot 0 + 4\cdot(-7) & -3\cdot 1 + 1\cdot 6 + 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ -52 & 23 \end{pmatrix}$$

- HUOM! Matriisikertolasku ei noudata tulon nollasääntöä: $A \cdot B = 0 \not\Leftrightarrow A = 0$ tai $B = 0$.

  <u>**Esim.**</u>

  $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow AB = 0, \text{ vaikkei kumpikaan ole nollamatriisi!}$$

- *Matriisipotenssi* voidaan määritellä ainoastaan neliömatriiseiden kokonaislukupotensseille: $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ kpl}}$, missä $k = 1, 2, 3, \ldots$ ja erikoistapauksena $A^0 = I$.
- Matriisikertolaskun erikoistapauksena voidaan vektoreiden sisätulo (pistetulo) kirjoittaa muodossa: $y \cdot x = y^T x$, missä vektorit x ja y ovat pystyvektoreita.
- Kompleksilukuvektoreille sisätulo määritellään hermiittisen konjugaatin avulla: $y^\dagger x$.

  <u>**Esim.**</u> Kvanttimekaniikassa on tapana käyttää ns. bra- ja ket-vektoreita (tulee sanasta "bracket"). Näitä merkitään

  – bra-vektori: $\langle\psi|$
  – ket-vektori: $|\psi\rangle$

  Ket-vektori voidaan toisinaan esittää pystymatriisina. Bra- ja ket-vektoreita voidaan muuntaa toisikseen hermiittisellä konjugoinnilla: $|\phi\rangle^\dagger = \langle\phi|$. Sisätulo merkitään kvanttimekaniikassa kirjoittamalla bra- ja ket-vektorit peräkkäin: $\langle\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle^\dagger|\phi\rangle$.

Neliömatriiseille määritellään:

- Kommutaattori: $[A, B] = AB - BA$ eli $AB = BA + [A, B]$
- Antikommutaattori: $\{A, B\} = AB + BA$ eli $AB = -BA + \{A, B\}$
- Jos siis kahden matriisin kommuttaattori on nolla, voidaan kyseisten matriisien kertolaskun järjestystä vaihtaa, sillä $[A, B] = AB - BA = 0 \rightarrow AB = BA$. Sanotaan, että kyseiset matriisit kommutoivat.
- Vastaavasti jos $\{A, B\} = AB + BA = 0 \rightarrow AB = -BA$ ja sanotaan, että kyseiset matriisit antikommutoivat.
- Kvanttimekaniikassa kommutoinnilla ja antikommutoinnilla on tärkeä fysikaalinen merkitys.

Matriisin jälki ja determinantti

- Kaikkiin neliömatriiseihin voidaan liittää kaksi *tunnuslukua*: *jälki* ja *determinantti*.
- Matriisin *jälki* (trace) on yksinkertaisesti diagonaalialkioiden summa: $\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Esim.

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \mathrm{Tr}\, F = -2 + 4 + 6 = 8.$$

- Matriisin A *determinanttia* merkataan $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.
- 2×2 matriisin determinantti määritellään seuraavasti: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- Isommat determinantit puretaan auki rekursiokaavan avulla siten, että $n \times n$ determinantti *kehitetään* vaaka- tai pystyrivien mukaan pienempien $(n-1) \times (n-1)$ alideterminanttien summana. Rekursiokaavaa käytetään toistuvasti, kunnes viimeisessä vaiheessa jäljellä on vain 2×2-determinantteja, joiden lukuarvot voidaan laskea edellä olevaa määritelmää käyttäen.
- Determinantin $\det A$ alkioon a_{ij} liittyvä *alideterminantti* D_{ij} saadaan pyyhkimällä alkuperäisestä determinantista pois i:s vaakarivi ja j:s sarake.

Esim. 4×4 determinantin alideterminantti D_{32} saadaan pyyhkimällä 3. vaakarivi ja 2. sarake pois $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -4 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

- **Determinanttiresepti**
  $n \times n$-determinantti *kehitetään* vaakarivin i mukaan seuraavasti:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \dots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \pm \boxed{a_{i1}} D_{i1} + \pm \boxed{a_{i2}} D_{i2} + \dots + \pm \boxed{a_{in}} D_{in},$$

  missä $\pm$ -merkkien paikoille valitaan etumerkit *merkkikaaviosta* kehitettävän rivin mukaan:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$$

  Vastaavalla tavalla determinantti voidaan kehittää myös pystyrivien mukaan.

- Ylläoleva kehityskaava eli rekursiokaava voidaan esittää matemaattisemmin kofaktoreiden avulla (ensimmäinen vaakarivin, jälkimmäinen pystyrivin mukaan):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{cof}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{cof}(a_{ij})$$

  Kaavassa esiintyvä kofaktori (cof) määritellään:

$$\operatorname{cof}(a_{ij}) \equiv (-1)^{i+j} D_{ij}$$

  missä D_{ij} on alkioon a_{ij} liittyvä $(n-1)$-rivinen alideterminantti.

- Kofaktorissa esiintyvä $(-1)^{i+j}$ on sama kuin em. *merkkikaavio*: $(-1)^{i+j} = \begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$.
- Determinantin arvo ei riipu siitä, minkä vaaka- tai pystyrivin mukaan se kehitetään. Helpointa on kehittää sellaisen rivin tai sarakkeen mukaan, jossa on mahdollisimman paljon nollia.

Esim. 4×4 determinantin kehitys 3. vaakarivin mukaan 3×3 determinanteiksi

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -4 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = + \; 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} - \; 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Etumerkit on poimittu merkkikaaviosta: $\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$. Syntyneet 3×3 determinantit voi kehittää rekursiokaavalla 2×2 determinanteiksi, joiden arvot osataankin jo laskea edellä olevan määritelmän perusteella.

- Determinantti voidaan määritellä myös permutaatiosymbolin $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ avulla

$$\det A \equiv \sum_{i_k} \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{i_k, j_k} \epsilon_{i_1 \ldots i_n} \epsilon_{j_1 \ldots j_n} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}$$

- Laskusääntöjä: $\det(AB) = \det A \det B$, $\det A^T = \det A$, $\det I = 1$, $\det 0 = 0$.
- Determinantin sievennyssäännöt:
  - Determinantin merkki muuttuu, jos vierekkäiset rivit tai sarakkeet vaihdetaan keskenään $\rightarrow$ determinantti on nolla, jos siinä on 2 identtistä riviä.
  - Jos determinantin jonkun rivin alkioilla on yhteinen tekijä, voidaan se ottaa kertoimeksi determinantin eteen.
  - Determinantin rivejä voidaan lisätä luvulla kertoen toisiinsa determinantin arvon muuttumatta.

Näitä käyttämällä kannattaa muokata determinantti muotoon, jossa on mahdollisimman paljon nollia.

Lineaarisen yhtälöryhmän esitys matriisimuodossa

- Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

eli lyhyesti $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Matriisi A on yhtälöryhmän kerroinmatriisi.

Esim. Kirjoitetaan seuraava yhtälöryhmä matriisimuodossa

$$\begin{cases} 7x & - & 3y & - & z & = 6 \\ -4x & + & 9y & + & 2z & = 5 \\ x & - & 2y & & & = -8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- Matriisimuotoinen yhtälö voidaan ratkaista käänteismatriisin avulla.

Käänteismatriisi

- Seuraavassa rajoitutaan neliömatriiseihin.
- Reaalilukujen jakolasku voidaan tulkita kertolaskuna käänteisluvulla.

  Esim. $7/3 = 7 \cdot \frac{1}{3} = 7 \cdot 3^{-1}$.

- Matriiseilla käänteislukua vastaava käsite on käänteismatriisi.
- Matriisin A käänteismatriisi A^{-1} on sellainen matriisi, jolle pätee $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. (Kyse ei ole negatiivisesta potenssista, vaan ainoastaan sovittu merkintätapa.)
- Matriisille A löytyy käänteismatriisi jos ja vain jos $\det A \neq 0$. Tällöin sanotaan, että matriisi on *kääntyvä* eli *säännöllinen*. Jos $\det A = 0$ on kyseessä *singulaarinen* matriisi, eikä sillä ole käänteismatriisia.
- Matriisien yhteydessä ei ole tapana puhua "matriisien jakolaskusta", vaan puhutaan kertomisesta käänteismatriisilla. Koska matriisikertolaskussa järjestyksellä on merkitystä, sanotaan usein vielä täsmennettynä "kertolasku vasemmalta" tai "kertolasku oikealta".

  Esim. Kerrotaan matriisi G käänteismatriisilla K^{-1}

  vasemmalta $K^{-1}G$ tai oikealta GK^{-1}.

- Käänteismatriisin etsiminen vastaa lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemista. Usein yhtälöryhmät onkin helpointa ratkaista juuri matriisimuodossa.
- Yleisen $n \times n$ matriisin käänteismatriisin etsimiseksi on 2 standardimenetelmää. Toinen on mekaaninen, mutta pitkä. Toinen on lyhyempi, mutta vaatii enemmän miettimistä. Käänteismatriisin etsiminen käsipelillä on jokatapauksessa työlästä, eikä sitä kannata käytännössä tehdä kuin pienille 2×2- tai 3×3-matriiseille. Yleensä käänteismatriiseja lasketaan tietokoneella.

1. Kofaktorimenetelmä (determinanttimenetelmä)

- Lyhyesti ja ytimekkäästi edellä määriteltyjen kofaktoreiden avulla:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \operatorname{cof}(a_{11}) & \operatorname{cof}(a_{12}) & \dots & \operatorname{cof}(a_{1n}) \\ \operatorname{cof}(a_{21}) & \operatorname{cof}(a_{22}) & \dots & \operatorname{cof}(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cof}(a_{n1}) & \operatorname{cof}(a_{n2}) & \dots & \operatorname{cof}(a_{nn}) \end{pmatrix}^T$$

Esim. 3×3 matriisin kääntäminen kofaktorimenetelmällä

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Lasketaan kaikki alideterminantit ja kokonaisdeterminantti $\det H$

$$\begin{pmatrix} D_{11} = -20 & D_{12} = -10 & D_{13} = -15 \\ D_{21} = 11 & D_{22} = 1 & D_{23} = -3 \\ D_{31} = 12 & D_{32} = -3 & D_{33} = 9 \end{pmatrix} \quad \text{ja } \det H = 45$$

Muodostetaan kofaktorit laittamalla alideterminanttien eteen merkit merkkikaaviosta

$$\begin{pmatrix} + -20 & -(-10) & + -15 \\ -11 & +1 & -(-3) \\ +12 & -(-3) & +9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 10 & -15 \\ -11 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Transponoidaan ja jaetaan H:n determinantilla

$$\frac{1}{45}\begin{pmatrix} -20 & 10 & -15 \\ -11 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}^T = \underline{\underline{\frac{1}{45}\begin{pmatrix} -20 & -11 & 12 \\ 10 & 1 & 3 \\ -15 & 3 & 9 \end{pmatrix}}}$$

2. Gaussin eliminointimenetelmä

- Käytännössä yhtälöryhmän ratkaisua kertomalla ja lisäilemällä yhtälöitä toisiinsa. Toteutetaan kompaktissa muodossa.

  1. Kirjoitetaan vasemmalle käännettävä matriisi ja sen viereen samankokoinen yksikkömatriisi.
  2. Päämääränä on muuntaa vasemmalla oleva matriisi yksikkömatriisiksi alkeisrivioperaatioita sopivasti käyttäen:
     - kerrotaan rivi i sopivalla luvulla n ja lisätään riviin j: $L(i,j)(n)$
     - kerrotaan rivin i alkiot luvulla n: $K(i)(n)$
     - vaihdetaan kaksi riviä i,j keskenään: $V(i,j)$

     Operaatiot toistetaan identtisenä oikealla olevalle matriisille.
  3. Kun vasemmalle on saatu yksikkömatriisi, on oikealle ilmestynyt etsitty käänteismatriisi.

Esim.

$$(H|I) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{V(1,3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{V(2,3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L(2,1)(-5/3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11/3 & -5/3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L(1,3)(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11/3 & -5/3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L(3,2)(1/15)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11/3 & -5/3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2/3 & 1/15 & 1/5 \\ 0 & 0 & 15 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L(3,1)(-11/45)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/9 & -11/45 & 4/15 \\ 0 & 3 & 0 & 2/3 & 1/15 & 1/5 \\ 0 & 0 & 15 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[K(3)(1/15)]{K(2)(1/3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/9 & -11/45 & 4/15 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & 1/45 & 1/15 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/15 & 1/5 \end{array}\right)$$

Kun oikealla olevassa matriisissa otetaan vielä murtoluku $\frac{1}{45}$ matriisin eteen yhteiseksi tekijäksi, saadaan sama tulos kuin aiemmin kofaktorimenetelmällä

$$\underline{\underline{H^{-1} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} -20 & -11 & 12 \\ 10 & 1 & 3 \\ -15 & 3 & 9 \end{pmatrix}}}.$$

Matriisimuotoisen yhtälön ratkaiseminen

- Matriisimuotoisen yhtälön ratkaiseminen perustuu käänteismatriisilla kertomiseen. Yhtälö kirjoitetaan sellaiseen muotoon, jossa vasemmalla puolella esiintyy tuntematon matriisi, joka halutaan ratkaista. Matriisin ympärillä olevat vakiomatriisit voidaan poistaa kertomalla yhtälöä puolittain sopivilla käänteismatriiseilla.

Esim. Ratkaise matriisi X matriisiyhtälöstä $AX = B$.
Jos matriisi A on säännöllinen eli $\det A \neq 0$, voidaan yhtälö kertoa vasemmalta puolittain A:n käänteismatriisilla A^{-1}.

$$\begin{aligned} \underbrace{A^{-1}A}_{=I} X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Esim. Ratkaise matriisi X matriisiyhtälöstä $BXK = U$.
Kerrotaan yhtälöä vasemmalta B:n käänteismatriisilla ja oikealta K:n käänteismatriisilla. Samat operaatiot toistuvat yhtälön oikealla puolella samassa järjestyksessä.

$$\begin{aligned} \underbrace{B^{-1}B}_{=I} X \underbrace{KK^{-1}}_{=I} &= B^{-1}UK^{-}1 \\ X &= B^{-1}UK^{-}1 \end{aligned}$$

Ominaisarvot ja -vektorit

- Tarkastelun kohteena jälleen neliömatriisit
- Jos on olemassa lineaarikuvaukseen A liittyvä vektori $\mathbf{x}$, jolle $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, sanotaan, että λ on kuvauksen A *ominaisarvo* ja $\mathbf{x}$ kyseiseen ominaisarvoon liittyvä *ominaisvektori*.
- Ominaisarvot ja ominaisvektorit ovat usein kompleksisia.

Esim. $K = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Vektori $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ on ominaisvektori ominaisarvolla 5, sillä

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{siis} \quad K\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$$

- Matriisin M ominaisarvot saadaan selville *karakteristisen yhtälön* avulla:

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Esim. $K = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Karakteristinen yhtälö

$$\det(K - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lambda_1 = 1} \text{ tai } \underline{\lambda_2 = 5}$$

- Kun ominaisarvot λ_i ovat selvillä, löydetään niitä vastaavat ominaisvektorit ominaisarvoyhtälön $A\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$ avulla.
- Ominaisvektorin pituuden voi valita vapaasti. Jos $\mathbf{x}$ on ominaisvektori, niin myös $t\mathbf{x}$ on ominaisvektori. Sovelluksissa käytetään usein ykkösen pituiseksi *normitettuja* ominaisvektoreita eli sellaisia, joille $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$ tai yleisemmin $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = 1$.

Esim. Etsitään edelläolevan matriisin K ominaisvektorit. Ominaisarvo: $\underline{\lambda_1 = \boxed{1}}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Josta saadaan ehto $x_1 = x_2$. Ominaisvektoriksi voidaan valita $x_1 = x_2 = 1$ eli $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$\underline{\lambda_2 = \boxed{5}}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{5} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

Josta saadaan ehto $x_2 = -3x_1$. Ominaisvektoriksi voidaan valita $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ eli $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$.
Normitetut ominaisvektorit ovat: $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Matriisin diagonalisointi

- Koordinaatiston kantajärjestelmän vaihtoon liittyvä tärkeä matriisimuunnos on niinkutsuttu *similariteettimuunnos*, joka on muotoa $M' = A^{-1}MA$ oleva muunnos. Kaavassa A on muunnosmatriisi, M on muunnettava matriisi ja M' muunnettu matriisi.
- Yksi tärkeimmistä similariteettimuunnoksista on sellainen muunnos, joka muuntaa alkuperäisen matriisin diagonaaliseksi matriisiksi. Tätä muunnosta kutsutaan matriisin diagonalisoimiseksi.
- Tyyppiä $n \times n$ olevan matriisin M diagonalisoiva matriisi P muodostetaan matriisin M n ominaisvektoreista $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sijoittamalla ne pystyvektoreiksi matriisiin P

  $$P = (x_1 x_2 \ldots x_n).$$

  Diagonalisointi tapahtuu nyt matriisimuunnoksella $P^{-1}MP$.
- Diagonalisoivassa matriisissa ei tarvitse käyttää normitettuja ominaisvektoreita, vaan mitkä tahansa ominaisvektorit kelpaavat.
- Diagonalisoituun matriisiin ilmestyy alkuperäisen matriisin ominaisarvot diagonaalille.

  $$P^{-1}MP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

  missä luvut λ_i ovat matriisin M ominaisarvoja.
- Jos tavoitteena on ainoastaan muodostaa diagonalisoitu matriisi, eikä itse muunnoksesta olla kiinnostuneita, ei diagonalisoivaa matriisia tarvitse edes etsiä, sillä tiedetään, että diagonalisoitu matriisi sisältää aina ominaisarvot diagonaalilla.

- $$\begin{array}{rlrl} A(BC) &= (AB)C & (AB)^T &= B^T A^T \\ A(B+C) &= AB + AC & (A^T)^T &= A \\ (A+B)C &= AC + BC & (A+B)^T &= A^T + B^T \\ & & (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} \end{array}$$

Taulukko 1: Laskusääntöjä

Esim. Diagonalisoi edellä olevan esimerkin matriisi $K = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Tämän matriisin eräät ominaisvektorit ovat $\mathbf{x_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. ja $\mathbf{x_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$. Muodostetaan näiden avulla diagonalisoiva matriisi P

$$P = (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Similariteettimuunnokseen tarvitaan lisäksi tämän käänteismatriisi P^{-1}

$$P^{-1} = \frac{1}{1 \cdot (-3) - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisointi suoritetaan similariteettimuunnoksella

$$P^{-1}KP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalisoidussa matriisissa on ominaisarvot diagonaalilla, kuten edellä todettiin.

$$\begin{array}{rlrl} \det A^T &= \det A & \mathrm{Tr}\, A^T &= \mathrm{Tr}\, A \\ \det (AB) &= \det A \det B & \mathrm{Tr}\, (AB) &= \mathrm{Tr}\, (BA) \\ \det A^{-1} &= 1/\det A & \mathrm{Tr}\, I_n &= n \end{array}$$

Taulukko 2: Determinantin ja jäljen laskusääntöjä

symmetrinen:	$A^T = A$	hermiittinen:	$A^\dagger = A$
antisymmetrinen:	$A^T = -A$	antihermiittinen:	$A^\dagger = -A$
ortogonaalinen:	$A^T = A^{-1}$	unitaarinen:	$A^\dagger = A^{-1}$
eli	$A^T A = I$	eli	$A^\dagger A = I$

Taulukko 3: Nimityksiä reaalisille ja kompleksisille matriiseille