Suhteellisuusteorian perusteet Harjoitus 3 Kevät 2014

Nämä tehtävät käsitellään 3. ja 4. helmikuuta.

1. Edellisten laskuharjoitusten assistentti ehtii pienestä välikohtauksesta huolimatta tenttiin ajoissa. Hän jakaa koepaperit ja hurahtaa sitten tiehensä nopeudella $0.9c$. Kun assistentin taskukellon mukaan on kulunut aika t_0, hän lähettää opiskelijoille valomerkin, jonka saavuttua perille koe päättyy. Määrää t_0 niin, että koeajaksi tulee neljä tuntia. Piirrä assistentin ja valonsäteen maailmanviivat tenttisaliin kiinnitetyissä koordinaateissa.

2. Johda Lorentzin muunnokset ilman oletusta, että valon nopeus on sama kaikille havaitsijoille. Vaadi sen sijaan, että yhdistelmä $(x^0)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ on invariantti. Muina oletuksina voi käyttää liikkeen suhteellisuutta ja sitä, että käänteismuunnos on hyvin määritelty. (Vihje: x-akselin voi valita nopeuden suuntaiseksi, joten tilanne on oleellisesti kaksiulotteinen. Lorentzin muunnosten luennoilla esitetty johto löytyy luentomonisteesta.)

3. Kaksiulotteisen euklidisen avaruuden, jonka koordinaatit ovat (x, y), kiertoja voi kuvata matriisilla

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

   missä θ on kiertokulma.

   Osoita, että Lorentzin muunnoksia 1+1-ulotteisessa Minkowski-avaruudessa, jonka koordinaatit ovat (ct, x), voi kuvata lähes (mutta ei aivan) samanlaisella matriisilla, jossa esiintyvät hyperbelisini ja hyperbelikosini. (Vihje: määrittele uusi muuttuja w yhtälöllä $\tanh w = \beta$, missä $\beta = v/c$.)

4. Tarkastellaan yhä 1+1-ulotteista tapausta. Olkoon $L(v)$, missä v on nopeus, Lorentz-muunnoksen matriisi. Osoita, että kaksi peräkkäistä Lorentzin muunnosta (nopeudet v_1 ja v_2) voidaan myös esittää matriisina $L(u)$. Mikä on u?