

Nämä tehtävät käsitellään 24. ja 25. helmikuuta. Nämä ovat viimeiset laskuharjoitukset. Tervetuloa Kvanttifysiikan perusteiden kurssille maanantaina 10.3.!

Avaruudeltaan tasaisen FRW-mallin metriikka on

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) .$$

Jos maailmankaikkeuden aine koostuu epärelativistisista hiukkasista, niin  $a \propto t^{2/3}$ . Oletetaan tehtävissä 2 ja 4 että tämä metriikka kuvaa maailmankaikkeutta. (Tämä ei pidä paikkaansa nykypäivänä tai varhaisina aikoina, mutta on hyvä approksimaatio noin yhden miljoonan ja muutaman miljardin vuoden välillä.) Tiedoksi, että 1 pc on noin 3.26 valovuotta.

1. Kuinka suuri aikaero tulee vuorokaudessa gravitaatiosta johtuvasta aikadilataatiosta kellojen käyntiin maanpinnalla ja GPS-satelliitin välillä? (Liikkeestä johtuvan aikadilataation voi tässä jättää huomiotta.) GPS-satelliitin korkeus maanpinnasta on 20 200 km, ja Maapallon säde on yhä 6 400 km ja massa  $6.0 \times 10^{24}$  kg. Schwarzschildin metriikka on

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) ,$$

missä  $r_s = 2GM/c^2$ .

2. a) Hubblen parametri on  $H \equiv \dot{a}/a$ . Havaintojen perusteella sen arvo on tällä hetkellä  $H_0 = 66 \dots 79$  km/s/Mpc. Mitkä ovat rajat maailmankaikkeuden iälle?  
 b) Otetaan arvoksi  $H_0 = 70$  km/s/Mpc. Hubblen lain mukaan kaksi kappaletta, joiden välinen etäisyys on  $D$ , näyttävät avaruuden laajenemisen takia etääntyvän toisistaan nopeudella  $v = H_0 D$ , kun  $D \ll c/H_0$ . Kuinka nopeasti meistä loittonee Virgon rypäs, jonka etäisyys on 17 Mpc? Kuinka nopeasti Aurinko loittonee maapallosta jos FRW-metriikka pätsisi aurinkokunnassa? (Auringon ja Maan välinen etäisyys on noin 150 miljoonaa kilometriä.)
3. Galaksit eivät ainoastaan etäänny poispäin toisistaan, ne myös harhautuvat sinne tänne toistensa vetovoiman ajamina. Näkemämme galaksin näennäinen pakonopeus meistä on  $v = H_0 d + v_{pec}$ , missä  $d$  on etäisyys ja  $v_{pec}$  ("peculiar velocity") on galaksin nopeus suhteessa yleiseen laajenemiseen. Tyypillisesti  $|v_{pec}| \approx 300$  km/s; oletetaan taas, että  $H_0 = 70$  km/s/Mpc. Millä etäisyydellä paikallisten liikkeiden vaikutus on niin pieni, että voi luotettavasti mitata arvon  $H_0$ ?
4. Kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn lämpötila  $T$  laskee avaruuden laajetessa kuten  $\propto a^{-1}$ . Mikroaaltotaustan lämpötila on nykyään noin 2.7 K. Kun säteily syntyi, sen lämpötila oli noin 3000 K. Lisäksi kosmisen mikroaaltotaustan havaintojen perusteella tiedetään, että tällä hetkellä säteilyn energiatiheys on  $4.18 \times 10^{-5} \times 3(100 \text{ km/s/Mpc})^2 / (8\pi G_N)$  (tämä sisältää valon lisäksi neutriinoja) ja aineen energiatiheys on noin  $0.14 \times 3(100 \text{ km/s/Mpc})^2 / (8\pi G_N)$ . (Näihin kummallisen näköisiin yksiköihin on syytä, joihin emme mene!)  
 a) Kuinka iso maailmankaikkeus oli mikroaaltotaustan syntyhetkellä suhteessa nykypäivään? Entä silloin kun säteilyn ja aineen energiatiheydet olivat yhtä suuret? (Vihje: aineelle  $\rho_m \propto a^{-3}$  ja säteilylle  $\rho_r \propto a^{-4}$ .) Mitkä ovat näitä ajanhetkiä vastaavat punasiirtymät?  
 b) Jos maailmankaikkeus on nyt 14 miljardia vuotta vanha, niin minkä ikäinen se oli kun mikroaaltotausta syntyi? Entä silloin kun säteilyn ja aineen energiatiheydet olivat yhtä suuret?  
 c) Kuinka suuri osa maailmankaikkeuden energiatiheydestä oli säteilyä ja kuinka suuri osa ainetta kun kosminen mikroaaltotausta syntyi?