

Dessa uppgifter behandlas den 24. och 25. februari. Det här är den sista räkneövningen för kursen. Välkomna till kursen Kvanttfysiikan perusteet måndagen 10.3.!

Metriken i FRW-modellen, som beskriver ett platt universum, är

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) .$$

Om universums materia består av icke-relativistiska partiklar är $a \propto t^{2/3}$. I uppgifterna 2 och 4 antar vi att den här metriken beskriver vårt universum (det här stämmer inte i dagsläget och ej heller i tidigare skeden, men är en bra approximering då universum var mellan en miljon och några miljarder år gammalt). För allmän kännedom är 1 pc ungefär 3.26 ljusår.

1. Hur stor tidsskillnad kommer det uppstå mellan klockorna på jordytan och på en GPS-satellit på ett dygn på grund av den gravitationella tidsdilatationen? (Tidsdilatationen som uppkommer från rörelsen kan ignoreras.) GPS-satellitens höjd från jordytan är 20 200 km, och Jordens radie och massa är fortsättningsvis 6 400 km respektive 6.0×10^{24} kg. Schwarzschilds metrik är

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) ,$$

där $r_s = 2GM/c^2$.

2. a) Hubbles parameter är $H \equiv \dot{a}/a$. Enligt mätningar är dess värde för tillfället $H_0 = 66 \dots 79$ km/s/Mpc. Vilka är gränserna för universums ålder?
 b) Låt oss ta $H_0 = 70$ km/s/Mpc som värde. Enligt Hubbles lag ser det, på grund av rymdens expansion, ut som att två kroppar rör sig ifrån varandra med hastigheten $v = H_0 D$, när avståndet mellan dem, D , uppfyller $D \ll c/H_0$. Hur snabbt ifrån oss rör sig Virgohopen, vars avstånd till oss är 17 Mpc? Hur snabbt skulle Solen röra sig ifrån Jorden om FRW-metriken gällde i vårt solsystem? (Avståndet till Solen är ungefär 150 miljoner kilometer.)
3. Galaxerna rör sig inte endast bort ifrån varandra, de åker även hit och dit på grund av gravitationen mellan dem. Den skenbara flykthastigheten som vi observerar är $v = H_0 d + v_{pec}$, där d är avståndet och v_{pec} ("peculiar velocity") är galaxens hastighet i förhållande till den allmänna expansionen. I snitt är $|v_{pec}| \approx 300$ km/s; vi antar återigen att $H_0 = 70$ km/s/Mpc. Vid vilket avstånd är de lokala rörelsernas effekt så liten att vi kan pålitligt mäta värdet på H_0 ?
4. Temperaturen T på den kosmiska bakgrundsstrålningen sjunker som $\propto a^{-1}$ på grund av rymdens expansion. Nu är bakgrundsstrålningens temperatur ungefär 2.7 K. När strålningen uppstod, var dess temperatur ungefär 3000 K. Därtill vet vi från observationer av den kosmiska bakgrundsstrålningen att strålningens energidensitet är $4.18 \times 10^{-5} \times 3(100 \text{ km/s/Mpc})^2 / (8\pi G_N)$ i dagsläget (hit är inte bara ljus inräknat, utan även neutriner) och materians energidensitet är ungefär $0.14 \times 3(100 \text{ km/s/Mpc})^2 / (8\pi G_N)$. (De här enheterna är konstiga av en orsak som vi inte tänker ge oss desto närmare in på!)
 a) Hur stort var universum när den kosmiska bakgrundsstrålningen uppstod i förhållande till i dag? Och hur är det med då när strålningens och materians densiteter var lika stora? (Tips: för materia gäller $\rho_m \propto a^{-3}$ och för strålning har vi $\rho_r \propto a^{-4}$.) Vilka rödförskjutningar motsvarar dessa tidpunkter?
 b) Om universum är 14 miljarder år gammalt, hur gammalt var det när bakgrundsstrålningen uppstod? Hur gammalt var det när strålningens och materians energidensiteter var lika stora?
 c) Hur stor andel av universums energidensitet var strålning och hur stor var materia när den kosmiska bakgrundsstrålningen uppstod?